CONCOURS (1)
ou
EXAMEN (1)

École normale supérieure - PARIS

le

Epreuve de

A remplir (en caractères d'imprimerie) et à cacheter par le candidat

NOM :

Prénom :

Date de naissance :

N° de table :

Signature :

Rabattre ici le coin gommé

Colonne réservée à l'organisateur

Corrigé du partiel d'analyse complexe

Exercice 1 : (a) Vu en cours. On a

$$\forall z \in D(0,R),\ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{où}$$

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(0,r)} \frac{f(w)}{w^{n+1}}\, dw \qquad \forall\, 0<r<R$$

(b) Comme f est intégrable, on peut passer en coordonnées polaires et, si $z \in D(0,R)$,

$$I = \frac{1}{\pi} \int_{D(0,R)} \frac{R^2 f(w)}{(R^2 - \bar{w} z)^2}\, d\lambda(w)$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{D(0,R)} \frac{f(w)}{\left(1 - \frac{\bar{w} z}{R^2}\right)^2}\, d\lambda(w)$$

$$= \frac{1}{\pi R^2} \int_{D(0,R)} f(w) \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \left(\frac{\bar{w} z}{R^2}\right)^n d\lambda(w)$$

$$= \frac{1}{\pi R^2} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{D(0,R)} \frac{(n+1) f(w)\, \bar{w}^n z^n}{R^{2n}}\, d\lambda(w)$$

où la permutation est justifiée car $\left| \frac{f(w)\, \bar{w}^n z^n}{R^{2n}} \right|$

est dominé par $g_n(w) = |f(w)| \cdot \left(\frac{|z|}{R}\right)^n$ et $\sum (n+1) g_n$ est intégrable sur $D(0,R)$, et en vertu du théorème de Fubini-Tonelli.

$$\text{Donc } I = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \frac{n+1}{\pi R^{2n+2}} \int_0^R \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) r^n e^{-in\theta} \, r\,dr\,d\theta$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \frac{n+1}{\pi R^{2n+2}} \int_0^R r^{2n+1} \left( \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{i\theta})}{r^{n+1} e^{i(n+1)\theta}} e^{i\theta} r\,d\theta \right) dr$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \frac{2(n+1)}{R^{2n+2}} \int_0^R r^{2n+1} \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(0,r)} \frac{f(w)\,dw}{w^{n+1}} \, dr$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} z^n a_n \cdot \frac{2(n+1)}{R^{2n+2}} \int_0^R r^{2n+1} \, dr$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

$$= f(z).$$

(2) Il suffit de montrer la convergence uniforme sur tout disque fermé assez petit.

Soit $z_0 \in \Omega$ et $\delta > 0$ tel que $\overline{D(z_0, \delta)} \subset \Omega$.

D'après la question (1)(b), on a, pour tout $z \in D(z_0, \delta)$ et pour tout $n \geq 0$, on a $f_n(z) = \frac{1}{\pi}\int_{D(z_0,\delta)} \frac{\delta^2 f_n(w)}{\left(\delta^2 - (\overline{w-z_0})(z-z_0)\right)^2} d\lambda(w)$

Donc si $\begin{cases} w \in D(z_0,\delta) \\ z \in D(z_0, \frac{\delta}{2}) \end{cases}$, comme $|(\overline{w-z_0})(z-z_0)| \le \frac{\delta^2}{2}$

$$|f_n(z)| \le \frac{1}{\pi}\int_{D(z_0,\delta)} \frac{\delta^2 |f_n(w)|}{(\delta^2/2)^2} d\lambda(w)$$

$$\le \frac{4}{\pi\delta^2}\int_{D(z_0,\delta)} |f_n(w)|\, d\lambda(w)$$

$$\le \frac{4}{\pi\delta^2}\int_{\Omega} |f_n(w)|\, d\lambda(w)$$

Donc $\|f_n\|_{\infty, \bar{D}(z_0,\frac{\delta}{2})} \le \frac{4}{\pi\delta^2}\int_{\Omega} |f_n(w)|\, d\lambda(w) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ □

Exercice 2 : (1) Comme $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$, et $Im(f\circ f) \subset Im(f)$
on a $\mathbb{C}^* \subset Im(f)$.
Montrons que $f$ ne s'annule pas. Supposons le contraire.
Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $f(z_0) = 0$. Si $z_0 \neq 0$, alors $z_0 \in Im(f)$,
donc $z_0 = f(z_1)$ avec $z_1 \in \mathbb{C}$, et $f\circ f(z_1) = e^{z_1} = f(z_0) = 0$
C'est absurde. Donc $z_0 = 0$. Mais alors $f\circ f(0) = f(0) = 0$
$= e^0 = 1$.

Nouvelle contradiction.

(2) $f \in H(\mathbb{C})$, $\mathbb{C}$ est étoilé par rapport à $0$, et $f$ ne s'annule pas. Le cours donne l'existence de $g$.

(3) On a $(g\circ f)' =$

$$= g'\circ f \cdot f'$$

$$= \frac{f'\circ f}{f\circ f} \cdot f' \quad (g' = f'/f)$$

$$= \frac{(f\circ f)'}{f\circ f}$$

$$= \frac{\exp}{\exp} = 1$$

Donc $g \circ f - Id$ est constante puisque $\mathbb{C}$ est connexe.

(4) D'après (3) $f$ est injective, donc $f \circ f$ l'est aussi, ainsi que exp, ce qui est contradictoire.

Exercice 3

(1) On vérifie que l'application $\theta_p : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \to ]-\pi, \pi[$ qui à $z$ associe l'unique $\theta(z) \in ]-\pi,\pi[$ tel que $z = |z| e^{i\theta(z)}$ est continue.

Alors il est immédiat que $g(z) = \log|z| + i\,\theta(z)$ est holomorphe, de dérivée $1/z$ sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ :

$$\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = \frac{Z - Z_0}{\exp(Z) - \exp(Z_0)} \xrightarrow[z \to z_0]{} \frac{1}{\exp(Z_0)} = z_0^{-1}.$$

On pose alors $z^\gamma = \exp(\gamma\, g(z))$ $\forall\, \gamma \in \mathbb{C}$.

(2) Si $\varepsilon \in ]0, \alpha - \rho[$, on a, pour $z \in \Omega$

$$|f(z)\, \theta_\varepsilon(z)| \leq A \exp(|z|^\rho) \left|\exp\left(-\varepsilon\, e^{(\rho+\varepsilon)[\log|z| + i\,\theta(z)]}\right)\right|$$

$$= A \exp(|z|^\rho) \exp\left(-\varepsilon |z|^{\rho+\varepsilon} \cos((\rho+\varepsilon)\theta(z))\right)$$

Or $(\rho+\varepsilon)\,\theta(z) \in \left]-\frac{\rho+\varepsilon}{\alpha}\frac{\pi}{2}, +\frac{(\rho+\varepsilon)}{\alpha}\frac{\pi}{2}\right[$, donc

$$\cos((\rho+\varepsilon)\theta(z)) \geq \cos\left(\frac{\rho+\varepsilon}{\alpha}\frac{\pi}{2}\right) > 0 \qquad \text{car } 0 < \frac{\rho+\varepsilon}{\alpha} < 1$$

Il est alors clair que le terme qui majore $|f(z)\,\theta_\varepsilon(z)|$ dans $(*)$ tend vers $0$ quand $|z| \to +\infty$.

(3) Soit $R > 0$ tel $\begin{cases} z \in \Omega \\ |z| \geq R \end{cases} \Rightarrow |f(z)\,\theta_\varepsilon(z)| \leq M$

~~Soit $\varepsilon \in ]0, \alpha - \rho[$.~~

# CONCOURS
ou
# EXAMEN

(1)

(1)

**École normale supérieure - PARIS**

le ______

Epreuve de ______

A remplir (en caractères d'imprimerie) et à cacheter par le candidat

NOM :

Prénom :

Date de naissance :

N° de table :

Signature :

*Rabattre ici le coin gommé*

Colonne réservée à l'organisateur

On a $|f\theta_\varepsilon(z)| \le M$ sur $\partial\Omega \cap \overline{D(0,R)}$ ainsi que sur $\Omega \cap \partial D(0,R)$, i.e sur $\partial(\Omega \cap D(0,R))$. D'après le principe du maximum, puisque $\overline{\Omega \cap D(0,R)}$ est compact, $f\theta_\varepsilon$ $C^0$

car $|f|_{|\partial\Omega} \le M$ et $|\theta_\varepsilon|_{|\overline{\Omega}} \le 1$

sur $\overline{\Omega \cap D(0,R)}$ et $f\theta_\varepsilon|_{\Omega \cap D(0,R)}$ est holomorphe, on a

donc $\|f\theta_\varepsilon\|_{\infty, \overline{D(0,R) \cap \Omega}} \le M$.

De plus, $|f\theta_\varepsilon| \le M$ sur $\partial\Omega \setminus D(0,R)$ et sur $\Omega \setminus D(0,R)$.

Par conséquent $\|f\theta_\varepsilon\|_{\infty, \overline{\Omega}} \le M$.

Maintenant $\forall z \in \overline{\Omega}$, $|f(z)\theta_\varepsilon(z)| \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} |f(z)|$.

Donc $\|f\|_{\infty, \overline{\Omega}} \le M$.

(4) Il suffit de prendre $f(z) = \exp(z^\alpha)$, dont le module est majoré par 1 sur $\partial\Omega$, tend vers $+\infty$ sur l'axe réel $>0$ et vérifie $|f(z)| \le \exp(|z|^\alpha)$ sur $\Omega$.

Exercice 4 : (1). $\zeta_a$ est un pôle simple de $f$.

On a $\operatorname{Res}(f, \zeta_a) = \dfrac{1}{\frac{d}{dz}(z^4+a^4)\big|_{\zeta_a}} = \dfrac{1}{4(\zeta_a)^3}$.

. $\zeta_a$ est un pôle double de $g$. On a

$$h(z) = (z-\zeta_a)^2 g(z) = (z-\zeta_a)^2 \cdot \frac{1}{(z^4-(\zeta_a)^4)^2}$$

$$= (z-\zeta_a)^2 \cdot \frac{1}{(z^2-(\zeta_a)^2)^2\,(z^2+(\zeta_a)^2)^2}$$

$$= (z-\zeta_a)^2 \,\frac{1}{(z-\zeta_a)^2\,(z+\zeta_a)^2} \times \frac{1}{(z^2+(\zeta_a)^2)^2}$$

$$= \frac{1}{(z+\zeta_a)^2} \cdot \frac{1}{(z^2+(\zeta_a)^2)^2}$$

On sait que $\operatorname{Res}(g, \zeta_a) = h'(\zeta_a)$

$$h'(\zeta a) = \frac{-2}{(2\zeta a)^3}\cdot\frac{1}{(2(\zeta a)^2)^2} + \frac{1}{(2\zeta a)^2}\cdot\frac{-4\zeta a}{(2(\zeta a)^2)^3}$$

$$= \frac{-2}{2^5(\zeta a)^7} - \frac{4}{2^5(\zeta a)^7} = -\frac{3}{16(\zeta a)^7}$$

(2) On a vu en cours que si l'on pose $\zeta_1 = e^{i\pi/4}$ et $\zeta_2 = e^{3i\pi/4}$, alors $a\zeta_1$ et $a\zeta_2$ sont les pôles de $f$ et $g$ dans le $\frac{1}{2}$ plan supérieur et comme les dénominateurs de $f$ et $g$ ne s'annulent pas sur $\mathbb{R}$, on a

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2i\pi\left(\frac{1}{4(\zeta_1 a)^3} + \frac{1}{4(\zeta_2 a)^3}\right)$$

$$= 2i\pi\left(\frac{-\zeta_1}{4a^3} - \frac{\zeta_2}{4a^3}\right)$$

$$= -\frac{2i\pi}{4a^3}\left(2i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{\pi}{a^3}\,\frac{\sqrt{2}}{2},$$

et

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx = 2i\pi\left(\frac{-3}{16}\right)\left(\frac{1}{(\zeta_1 a)^7} + \frac{1}{(\zeta_2 a)^7}\right)$$

$$= \frac{2i\pi}{a^7}\left(\frac{-3}{16}\right)\cdot(\zeta_1 + \zeta_2)$$

$$= \frac{2i\pi}{a^7}\left(\frac{-3}{16}\right)\left(2i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{3\pi\sqrt{2}}{8a^7}.$$

Exercice 5

- Si $|z| > r$, $h(w) = \log\left|\dfrac{1}{z - w}\right|$ est harmonique sur un voisinage de $D(0,r)$, donc elle vérifie la propriété de la moyenne, et on a

$$h(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(re^{i\theta})\, d\theta \quad \text{i.e}$$

$$\log(1/|z|) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|\frac{1}{z - re^{i\theta}}\right| d\theta$$

- Si $0 < |z| < r$, on a $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|\frac{1}{z - re^{i\theta}}\right| d\theta$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|\frac{1}{1 - z/r\, e^{-i\theta}}\right| d\theta + \log\left(\frac{1}{r}\right)$$

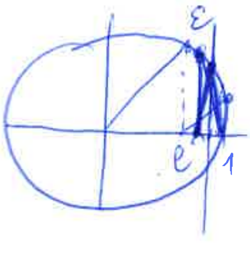
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|\frac{1}{1 - \frac{|z|}{r} e^{-i(\theta - \theta(z))}}\right| d\theta + \log\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|\frac{1}{1 - \frac{|z|}{r} e^{iu}}\right| du + \log\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$= \log(1/1) + \log\left(\frac{1}{r}\right) = \log\left(\frac{1}{r}\right)$$ par le 1er cas de figure.

- le cas $z = 0$ est évident.

- Si $|z| = r$, le problème revient à établir que $\displaystyle\int_0^{2\pi} \log\left|\frac{1}{1 - e^{i\theta}}\right| d\theta = 0$




Pour $\ell \in ]0,1[$ et $\theta_0 \in ]0, \frac{\pi}{4}[$ on a

$$\int_0^{2\pi} \log\left|\frac{1}{\ell - e^{i\theta}}\right| - \int_0^{2\pi} \log\frac{1}{|1 - e^{i\theta}|} d\theta = \underbrace{2\left[\int_{\theta_0}^{\pi} \log\frac{1}{|\ell - e^{i\theta}|} d\theta - \int_{\theta_0}^{\pi} \log\left|\frac{1}{1 - e^{i\theta}}\right| d\theta\right.}_{J(\ell, \theta_0)}$$

$$+ \int_0^{\theta_0} \underbrace{\log\left|\frac{1 - e^{i\theta}}{\ell - e^{i\theta}}\right|}_{u(\ell,\theta)} d\theta$$. Soit $\varepsilon \in ]0, \frac{\pi}{4}[$. On a $\lim\limits_{\ell \to 1} J(\ell, \varepsilon) = 0$

par CVD. De plus, $\displaystyle\left|\int_0^{\varepsilon} u(\ell,\theta)\, d\theta\right| \leq \left|\int_0^{\varepsilon} 1_{\{u(\ell,\theta) \leq 0\}} u(\ell,\theta) d\theta\right| + \int_0^{\varepsilon} 1_{\{\ell,\theta > 0\}} u(\ell,\theta)\, d\theta$

$$\leq -u(\ell, \theta_0) \cdot \varepsilon + 2\int_0^{\varepsilon} |\log(1 - e^{i\theta})|\, d\theta$$

• Si $z = r$, le problème revient à montrer que $\int_0^{2\pi} \log\left|\frac{1}{1-e^{i\theta}}\right| d\theta = 0$
Il est clair que l'intégrale converge.
On peut le montrer par continuité.

Soit $\varepsilon > 0$. Si $\rho \in ]0,1[$ et $\alpha \in ]0, \frac{\pi}{4}[$,

$$\int_0^{2\pi} \log\left|\frac{1}{\rho - e^{i\theta}}\right| d\theta - \int_0^{2\pi} \log\left|\frac{1}{1-e^{i\theta}}\right| d\theta$$

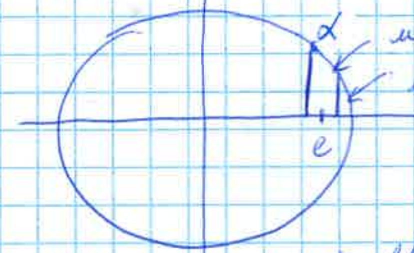
$$= 2\int_\alpha^\pi \log\left|\frac{1-e^{i\theta}}{\rho - e^{i\theta}}\right| d\theta + \int_0^\alpha \log \underbrace{\left|\frac{1-e^{i\theta}}{\rho - e^{i\theta}}\right|}_{u(\rho,\theta)} d\theta$$

On peut choisir $1 > \rho_\alpha > \cos(\alpha)$ tel que $1 > \rho \geq \rho_\alpha \Rightarrow \left|2\int_\alpha^\pi \log\left|\frac{1-e^{i\theta}}{\rho - e^{i\theta}}\right| d\theta\right| < \varepsilon$

par continuité de l'intégrale / $\rho$.

Ensuite, si $1 > \rho \geq \rho_\alpha$, $\left|\int_0^\alpha u(\rho,\theta)\, d\theta\right| \leq \left|\int_0^\alpha 1_{\{u(\rho,\theta) < 1\}} \log(u(\rho,\theta))\, d\theta\right|$

$$+ \left|\int_0^\alpha 1_{\{u(\rho,\theta) \geq 1\}} \log(u(\rho,\theta))\, d\theta\right|$$




$$\leq 2\int_0^\alpha \left|\log|1-e^{i\theta}|\right| d\theta + \alpha\, u(\rho,\alpha)$$

où l'on a utilisé dans la 1ère intégrale le fait que

$$\frac{1}{|1-e^{i\theta}|} \geq \frac{1}{|\rho - e^{i\theta}|} \geq 1 \quad \text{si} \quad u(\rho,\theta) < 1$$

et le fait que $u(\rho,\theta) \leq u(\rho,\alpha)$ si $u(\rho,\theta) \geq 1$.

Alors, on peut choisir $1 > \rho'_\alpha > \rho_\alpha$ t.q $1 > \rho \geq \rho'_\alpha \Rightarrow u(\rho,\alpha) \leq 2$.

Ainsi, $\rho \in ]\rho'_\alpha, 1[ \Rightarrow \left|\int_0^{2\pi} \log\frac{1}{|\rho - e^{i\theta}|} d\theta - \int_0^{2\pi} \log\frac{1}{|1-e^{i\theta}|} d\theta\right|$

$$\leq \varepsilon + 2\alpha + 2\int_0^\alpha \left|\log|1-e^{i\theta}|\right| d\theta$$

On choisit maintenant $\alpha \leq \frac{\varepsilon}{2}$ t.q $2\int_0^\alpha \left|\log|1-e^{i\theta}|\right| d\theta \leq \varepsilon$

et $\rho \in ]\rho'_\alpha, 1[ \Rightarrow \left|\int_0^{2\pi} \log\frac{1}{|\rho - e^{i\theta}|} d\theta - \int_0^{2\pi} \log\frac{1}{|1-e^{i\theta}|} d\theta\right| \leq 3\varepsilon$